

ПРОБЛЕМЫ МЕТОДОЛОГИИ

УДК 372.851

DOI: 10.17853/1994-5639-2019-2-9-26

КРАСОТА В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ: СИНЕРГЕТИЧЕСКОЕ МИРОВИДЕНИЕ

В. А. Тестов

Вологодский государственный университет, Вологда, Россия.

E-mail: vladafan@inbox.ru

Аннотация. *Введение.* Ключевыми понятиями, раскрывающими сущность красоты, в настоящее время являются математические универсалии «симметрия» и «фрактальность». Однако соотношение этих категорий, важнейших для современной математики, науки и культуры в целом, ни в математическом образовании, ни в педагогической литературе до сих пор практически не рассматривалось из-за того, что понятия фракталов, фрактальности и производных от них фрактальной геометрии и фрактальной графики, ставшие общеупотребительными среди математиков и компьютерных художников, пока тем не менее не включены в подавляющее большинство вузовских программ.

Цель статьи – комплексно, с позиций синергетического мировидения продемонстрировать взаимообусловленность и корреляции феноменов симметрии и фракталов и показать значимость совместного изучения этих понятий в курсе математики для эстетического воспитания школьников и студентов и формирования их мировоззрения.

Методология и методы. Ведущая роль в исследовании отводится постнеклассической методологии, базирующейся на синергетическом подходе к процессу познания. Привлекались также положения тринитарной методологии, предполагающей наличие, кроме двух бинарных оппозиций, третьего элемента, необходимого для решения проблемы противоречия данных оппозиций и интеграции в единое целое как условия их сосуществования. В ходе работы использовались анализ и обобщение научных педагогических и методических источников, методы сравнительно-сопоставительного, исторического и логического видов анализа.

Результаты и научная новизна. На протяжении столетий красота понималась как устойчивый порядок и симметрия. Синергетика как общенаучная теория о самоорганизации сложных систем позволяет дать иную трактовку красоты – как некоего аттрактора, возникающего в результате самоорганизации природы или полета человеческой мысли.

В наиболее общем виде симметрия может быть выражена как преобразование подобия, которое лежит также в основе другого понятия – фрактальности. С одной стороны, фрактальность можно воспринимать как одно из проявлений симметрии в расширительном ее смысле. С другой стороны, симметрию можно считать выражением фрактальности с конечным числом итераций. Таким образом, понятия симметрии и фрактальности довольно тесно взаимосвязаны, хотя это две противоположности, которые эстетически и математически взаимодополняют друг друга и переходят одна в другую. Если первая раскрывает в красоте устойчивый порядок, то вторая отражает в ней результат самоорганизации хаоса природы или свободы человеческой мысли. В синергетической парадигме категория красоты представляется как интеграция и взаимодействие симметрии и фрактальности. Оба этих понятия равно важны для постижения гармонии мироздания, чем определяется их значимость для обучения математике и эстетического воспитания учащихся.

Практическая значимость. Совместное овладение теорией симметрии и фракталов будет способствовать решению задач, поставленных в Концепции развития математического образования: повышению мотивации учащихся к изучению математики, развитию их познавательного интереса и познавательной активности, сближению образовательного и исследовательского процессов, преодолению проблем эстетической направленности познания.

Ключевые слова: эстетическое воспитание, обучение математике, симметрия, самоподобие, фрактальность, хаос, порядок.

Благодарности. Автор выражает признательность рецензентам и редакторам статьи за добросовестный труд.

Для цитирования: Тестов В. А. Красота в математическом образовании: синергетическое мировидение // Образование и наука. 2019. Т. 21. № 2. С. 9–26. DOI: 10.17853/1994-5639-2019-2-9-26

BEAUTY IN MATHEMATICAL EDUCATION: SYNERGETIC WORLDVIEW

V. A. Testov

Vologda State University, Vologda, Russia.

E-mail: vladafan@inbox.ru

Abstract. Introduction. The most important concepts underlying beauty are the mathematical concepts of symmetry and fractality. These categories are fundamental for modern mathematics, science and culture in general. However, in mathematical education and pedagogical literature, the ratio of these main categories has not been considered yet. Of special interest is the fact that the concepts

of fractals, fractality and fractal geometry and fractal graphics are not included in the vast majority of high school programmes, although they have become commonly used among mathematicians and graphic designers.

The *aims* of the article were the following: to demonstrate intersectionality and correlations of the basic concepts of symmetry and fractals from the point of view of synergetics, to establish the relevance of studying these concepts in the course of mathematics for aesthetic education of students and development of their worldview.

Methodology and research methods. A significant role in the study is given to post-non-classical methodology based on synergetic worldview. The author employed the provisions of trinitarian methodology: in addition to two binary oppositions, the third element is necessary to solve the problem of contradiction of these oppositions and integration into one coherent whole as the conditions of their co-existence. In the course of the research, analysis and generalisation of pedagogical and methodical literature, methods of comparative, historical and logical types of analysis were used.

Results and scientific novelty. For centuries, beauty has been understood as a stable order and symmetry. The synergetics as a general scientific theory about self-organisation of complex systems allows us to give another interpretation of beauty – as a kind of attractor, the result of self-organisation of nature or the flight of human thought.

In the most general view, symmetry can be considered as transformation of similarity, which is also the core of another concept – fractality. On the one hand, fractality can be considered as one of the manifestations of symmetry in the broad sense. On the other hand, symmetry can be considered as a manifestation of fractality with a finite number of iterations. Thus, the concepts of symmetry and fractality are closely interrelated. Symmetry and fractality are two opposites, mutually complementing each other, aesthetically and mathematically mutually passing into each other. Symmetry reveals the beauty of a sustainable order and fractality reflects the beauty of the result of self-organisation of the chaos of nature or the freedom of the human mind. Therefore, symmetry and fractals are the most important concepts for the disclosure of the beauty of the universe, which determines their importance for mathematical learning and for aesthetic education of students.

Practical significance. Taking into account the fact that the concepts of symmetry and fractals are directly related to each other, they should be jointly-taught. This will contribute to the development concept of mathematics education: to increase motivation for mathematical studies, to develop cognitive interests and activities, to narrow the gap between education and research processes, to overcome the problems with aesthetic education of students.

Keywords: aesthetic education, teaching mathematics, symmetry, self-similarity, fractality, chaos, order.

Acknowledgements. The author expresses his sincere gratitude to the reviewers and editors for their conscientious work.

For citation: Testov V. A. Beauty in mathematical education: Synergetic worldview. *The Education and Science Journal*. 2019; 2 (21): 9–26. DOI: 10.17853/1994-5639-2019-2-9-26

Введение

В формировании личности учащегося большую роль играет эстетическая функция образования, благодаря которой у обучающегося развиваются эстетическая культура освоения действительности и способность к творчеству, складываются представления о красоте окружающего мира.

Красота мироздания по-особому раскрывается в каждом учебном предмете. При обучении математике это происходит посредством постижения учащимися гармонии данной научной области. Математика представляет собой не только стройную систему знаний, уравнений, задач и расчетов, но и уникальное универсальное средство осознания величия мира. Осваивая математику, ученик постепенно открывает для себя всё новые и новые лики красоты, продвигаясь от ее понимания к созидательной деятельности.

Красота подтверждает и дополняет универсальность математических теорем и формул, которые действуют в равной степени эффективно в живой и неживой природе, в атомах и во Вселенной, в научных открытиях и произведениях искусства. Математика дает возможность проникнуть в сущность воспринимаемых явлений и объектов и углубить знания о принципах гармонии.

С древнейших времен красоту и гармонию связывают с понятием симметрии. По словам видного немецкого математика XX века Германа Вейля, «симметрия ... является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство»¹.

В конце XX века с развитием синергетического мировидения, теории хаоса, а также распространением и совершенствованием компьютерной техники возникло другое важнейшее понятие, основополагающее для красоты и гармонии, – фрактальность. Сегодня это понятие и производные от него «фрактальная геометрия» и «фрактальная графика» стали общеупотребительными среди математиков и компьютерных художников.

¹ Вейль Г. Симметрия. Москва: Наука, 1968. С. 37.

Термин фрактал был предложен в 1975 г. американским математиком швейцарского происхождения Бенуа Мандельбротом. Он обозначил этим словом нерегулярные самоподобные структуры, которым посвятил свои исследования. В неизведанных элементах таких структур может быть представлен целый загадочный мир Вселенной.

Симметрия и фрактальность – ключевые составляющие современной научной картины мира и понимания красоты окружающей нас реальности, что определяет их ведущую роль в математическом образовании. Однако соотношение этих феноменов до сих пор не рассматривалось в педагогической литературе, несмотря на то, что такая потребность, безусловно, существует. Обращение к данной проблеме обусловлено, прежде всего, необходимостью совершенствования российского математического образования, усиления его эстетической составляющей, приобщения учащихся к духовной культуре и творческой деятельности.

Цель данной статьи – комплексно, с современных синергетических позиций, ведущих для раскрытия красоты феноменов симметрии и фракталов, проанализировать их взаимосвязи и показать значимость этих понятий для эстетического воспитания подрастающего поколения – школьников и студентов – при изучении ими математики.

Обзор литературы

Категории красоты в математике посвящено достаточно большое количество работ. Наиболее фундаментальные среди них – книги А. В. Волошинова¹, Б. Варги, Ю. Дюмень, Э. Лопарица², А. И. Азевича³, В. А. Тадеева⁴ и др. Авторы показывают, что за различными художественными, архитектурными, языковыми и музыкальными творениями и природными явлениями всегда скрываются общие математические закономерности. Особое внимание уделяется феномену симметрии (А. В. Волошинов, Л. В. Тарасов⁵ и др.), а также «золотому сечению», известному еще с ветхо-

¹ Волошинов А. В. Математика и искусство: 2-е изд., дораб. и дополн. Москва: Просвещение, 2000.

² Варга Б., Дюмень Ю., Лозариц Э. Язык, музыка, математика: пер. с венгер. Москва: Мир, 1981.

³ Азевич А. И. Двадцать уроков гармонии: гуманитарно-математический курс. Москва: Школа-Пресс, 1998.

⁴ Тадеев В. А. От живописи к проективной геометрии. Киев: Выща школа, 1988. 232 с.

⁵ Тарасов Л. В. Этот удивительно симметричный мир. Москва: Просвещение, 1988. 176 с.

заветных времен, хотя сам этот термин первым стал использовать Леонардо да Винчи в XV веке.

Симметрия является древней общечеловеческой идеей гармонии мироздания, воплотившейся во множестве сакральных символов, из поколения в поколение формирующих сознание человека. Смысл симметрии в искусстве – это отражение и порождение красоты и совершенства; в науке – поиск и осознание порядка. А. В. Волошинов образно сформулировал траекторию развития идеи симметрии в культуре: она прошла путь «от “видимой глазом” природной симметрии до “видимой разумом” научной концепции».

В настоящее время концепции симметрии широко используются в самых разных научных областях, в частности в психологии [1–3] и образовании [4–6].

Пытаясь раскрыть понятие красоты математических объектов, ученые-математики особое внимание уделяли наличию в них меры порядка. В частности, А. Пуанкаре отмечал, что человек «свойства красоты и изящества видит в элементах, гармонически расположенных таким образом, что ум без усилий может их охватывать целиком, угадывая детали». По мнению ученого, порядок в систему математических знаний вносит именно симметрия, понимаемая как гармония отдельных составляющих этой системы, их счастливое равновесие, сообщающее ее компонентам внутреннее содержательное единство¹.

В. Г. Болтянский полагал, что «красота математического объекта заключается в наличии изоморфизма между объектом и его наглядной моделью, простоты модели и неожиданности ее появления, что можно кратко записать в виде формулы: красота = изоморфизм + простота + неожиданность»².

Наиболее четко формула красоты математического объекта была сформулирована Г. Биркгофом³:

$$M = O/C,$$

где M – мера красоты объекта;

O – мера порядка в объекте;

C – мера усилий, затрачиваемых для понимания сущности объекта.

¹ Пуанкаре А. О науке. Москва: Наука, 1990.

² Болтянский В. Г. Математическая культура и эстетика // Математика в школе. 1982. № 2. С. 40–43.

³ Биркгоф Г. Математика и психология. Москва: Советское радио, 1977.

В соответствии с этой, наиболее распространенной, точкой зрения красота объекта будет увеличиваться по мере упорядочивания его структуры. Таким образом, симметрия – наиболее наглядная форма воплощения порядка в природе и творениях человека.

Вопросам эстетического воспитания на уроках математики посвящено достаточное количество педагогической литературы ([7–9] и др.), причем большая часть методических работ ограничивается знакомством в учебном процессе с различными видами симметрии ([10] и др.).

Исследования по эстетическому воспитанию обучающихся средствами математики систематизировал и обобщил в своей монографии член-корреспондент РАО Г. И. Саранцев. На его взгляд, к признакам красоты математического объекта относятся «соответствие математического объекта его стандартному, стереотипному образу; порядок, логическая строгость; простота; универсальность использования этого объекта в различных разделах математики; оригинальность, неожиданность» [11, с. 15].

Сравнительно недавно, в конце XX столетия, во многом благодаря трудам Б. Мандельброта¹, в дополнение к законам симметрии были раскрыты структура и эстетика фракталов – множеств, обладающих свойством самоподобия. Это явление часто встречается в живой и неживой природе, а также в искусстве, архитектуре и других сферах человеческой деятельности.

Н. Х. Розов, задавая вопрос: «Какое эстетическое удовольствие может получать от решения квадратных уравнений тот, кто глух к математике?», отвечает: «Фракталы же порождают действительно красочные, оригинальные полотна, не уступающие произведениям абстрактной живописи» [12, с. 7].

В последнее время в связи с бурным развитием информационных технологий появилось большое количество научно-методических исследований, посвященных изучению фракталов и фрактальной геометрии в вузах и других учебных заведениях. Целый ряд авторов методик обучения математике указывают на необходимость и обязательность знакомства с фрактальной геометрией учащихся школ и студентов вузов [13–16].

Изучение фрактальных множеств позволяет учащимся не только увидеть эстетическую привлекательность фрактальной геометрии, но и постигнуть тесные интеграционные связи математики и информатики.

Как отмечают, например, А. А. Горшков, В. С. Секованов, Ж. В. Дорохова, Ю. В. Кудряшова, С. Ф. Катержина, А. Ю. Зобов и Е. М. Селезне-

¹ Мандельброт Б. Б. Фрактальная геометрия природы. Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.

ва [17–19], фрактальная графика притягивает взоры, а программные средства для ее создания могут стать той ступенькой, которая позволяет приблизиться к настоящему фрактальному творчеству.

Один из родоначальников использования в российском образовании фрактальной геометрии В. С. Секованов считает, что «знакомство студентов с элементами фрактальной геометрии способствует формированию и развитию творческих способностей человека и художественной (эстетической) составляющей его личности» [15].

Размышляя над проблемами изучения фрактальной геометрии в учебном процессе педагогического колледжа, А. А. Бабкин приходит к выводу, что «фрактальные множества способны ... заставить по-новому пересмотреть эстетическую привлекательность математики, создать у человека способность “видеть” математическое в нематематическом, что является определяющей ролью фрактальной геометрии в будущем науки и образования» [20].

А. А. Горшковым был разработан элективный курс для школьников «Математика и гармония мира», который, по его мнению, «способен оказать положительное воздействие на формирование эстетических качеств учащихся и повышение интереса к изучению математики. В содержательной части курса уделяется внимание таким эстетически привлекательным разделам математики, как симметрия, пропорция, золотое сечение, правильные многоугольники и многогранники. Одной из составных частей данного курса является раздел, посвященный изучению элементов фрактальной геометрии» [21].

Методология и методики исследования

В ходе предпринятого нами исследования использовались анализ и обобщение педагогической и методической литературы и методы сравнительно-сопоставительного, исторического и логического видов анализа проблемы красоты в природе, культуре и науке.

Как неоднократно отмечалось в наших предшествующих публикациях, «образовательная парадигма в информационном обществе должна опираться на постнеклассическую методологию, базирующуюся на синергетическом мировидении» [22–24].

В постнеклассической науке в последнее время все шире используется также и тринитарная методология, предполагающая наличие, кроме двух бинарных оппозиций, некоего третьего элемента, который необходим для решения проблемы противоречия бинарных оппозиций, их интеграции в единое целое как условия их сосуществования.

Ранее мы отмечали: «Самоорганизация характерна для многих сложных систем. Она заключается в том, что очень часто большое или даже бесконечное число величин, или переменных, характеризующих объект, “подчиняются” всего нескольким переменным, так называемым *параметрам порядка*. Все эти процессы описываются в синергетике. Традиционная наука отвергала наличие определенной доли хаоса в процессе познания, относя его к дезорганизующим факторам. Однако в наше время становится все более очевидной его конструктивная роль» [24].

Самоорганизация знания, формирование у школьника или студента системы знаний – очень сложный и пока недостаточно изученный процесс, в котором основные научные концепции, идеи и самые необходимые практические навыки являются параметрами порядка. Таковыми в данной статье выступают идеи симметрии и фрактальности.

Основные результаты

Обратимся к анализу этих двух основных идей, которые в русле синергетических представлений считаются определяющими параметрами красоты и порядка.

Древнегреческие философы порядок в мироздании называли космосом, противопоставляя его хаосу. Мыслители соединяли в понятии «космос» две функции – упорядочивающую и эстетическую.

Как уже не раз отмечалось выше, наиболее наглядной формой воплощения порядка в природе и творениях человека с древнейших времен являлась симметрия. Представления о ней имелись у многих народов, но, как правило, в более широком смысле – как представления об уравниваемости и гармонии. Человек посредством симметрии всегда пытался «постичь и создать порядок, красоту и совершенство»¹.

Принцип симметрии окончательно был признан одной из основ классической научной картины мира, после того как в 1918 г. Эмми Нетер доказала свою широко известную теорему о том, что каждому виду симметрии соответствует свой закон сохранения.

Главные характеристики симметрии – пропорциональность, соразмерность, инвариантность, проявляемые при каких-либо преобразованиях. Но в природе части, сходные между собой, не могут в точности совпадать, поэтому симметрия в природе никогда не бывает абсолютной.

В математике, напротив, симметрия стремится к абсолютной строгости. Так, в геометрии симметрией называется способность фигур и тел сохра-

¹ Вейль Г. Симметрия. Москва: Наука, 1968. С. 37.

нять форму и свойства при некотором преобразовании. Еще в школе учащиеся знакомятся с зеркальной и центральной симметрией. Кроме того, имеется поворотная симметрия, которая означает, что при вращении тела в пространстве на некоторые углы его вид не изменится. Рассматриваются и другие виды симметрии, непохожие на обычные: «трансляционная (повторяющийся по некоторому правилу рисунок через одинаковое или закономерное расстояние, например, рисунок на обоях, паркет, кружева, черепичная крыша, узор на шкуре змеи), цветная (зеркальное отражение вместе с переменной цвета, например, шахматные фигуры, расставленные в одинаковом порядке), винтовая (наблюдается в расположении листьев на стеблях многих растений, чтобы они не заслоняли друг друга от света)» [7].

В алгебре существуют симметрические многочлены, теория которых позволяет решать многие нетривиальные задачи элементарной математики.

Герман Вейль под симметрией понимал неизменность каких-либо свойств объекта при преобразованиях некоторого вида. Эти преобразования могут быть не только движениями. Так, одну из глав своей книги Г. Вейль посвятил орнаментной симметрии. В узорах и орнаментах обнаруживается упорядоченность и подчиненность определенному набору правил. В случае потенциально бесконечных узоров «операция, относительно которой данный узор остается неизменным, не обязательно должна быть движением, она может быть и подобием»¹. Далее Г. Вейль подробно описывал один из примеров симметрии, определяемый группой растяжений, реальным воплощением которой в природе является раковина *Turritella duplicata*.

Симметрия и устойчивый порядок со времен Сократа в соответствии с господствующими на протяжении столетий взглядами понималась как красота. Сократ, в частности, утверждал, что красота есть целесообразность.

Однако некоторые другие философы прошлого придерживались иной точки зрения: в красоте они видели продукт свободной мысли. Например, Иммануил Кант считал, что красота есть целесообразность без цели, она выражает способность человека постигать природу по законам свободы. Используя современную терминологию, эту мысль можно переформулировать так: красота есть некий аттрактор, результат самоорганизации природы или полета свободной человеческой мысли.

Конец XX века привнес в понимание красоты мироздания новые представления. Синергетическая парадигма открыла ее видение как вза-

¹ Вейль Г. Симметрия. Москва: Наука, 1968. С. 93.

имодействие космоса и хаоса, их гармонического баланса, что позволило дать новую эстетическую оценку креативной роли хаоса. У А. В. Волошинова и С. В. Шиндель читаем: «Хаос на протяжении всей истории мировой культуры имел негативную окраску, и гармония мироздания понималась исключительно как преодоление порядком первородного хаоса. В синергетическом мировидении хаос предстает в качестве механизма выхода на структуры-аттракторы. Бороться против хаоса бессмысленно, поскольку наличие хаоса является отличительным признаком сложных открытых систем, нужно лишь научиться использовать его конструктивную роль» [25].

По определению того же А. В. Волошинова и Ю. В. Таболяковой, «космос – это *красота актуальная*, тогда как хаос есть *красота потенциальная*. И вновь нетрудно заметить, как свойства актуальной и потенциальной красоты в философии красоты – эстетике – перекликаются со свойствами актуальной и потенциальной бесконечности в философии математики, на которые обратил внимание еще Аристотель» [26].

Вернемся к тезису о том, что в наиболее общем виде симметрия может быть выражена как преобразование подобия. Но преобразование подобия лежит также в основе другого понятия, широко используемого в настоящее время в математике, – понятия фрактальности. Имеется несколько ее определений. Одно из них базируется на таком важнейшем свойстве фрактала как самоподобие, которое понимается не только в классическом смысле, когда часть является точной копией целого, но и в неклассическом нелинейном смысле, когда часть «похожа» на целое. Теоретически самоподобие частей фрактала бесконечно, но визуально человеческий глаз в состоянии различить не более 5–7 из них. Большее число самоподобий фрактальных частей можно обнаружить лишь при компьютерном увеличении.

Под определение фрактала через самоподобие частей попадают не только конструкции, созданные при помощи компьютерной графики, но и давно известные предметы, явления, тексты, например: детские пирамидки, матрешки, художественные произведения, в которых присутствует равномерность повторов, что особенно характерно для русского устного народного творчества (сказки типа «Репка», «Теремок», «Колобок» и т. п.).

Имеются примеры изоморфных фрактальных структур, основанных на ряде золотого сечения, что, по мнению А. В. Волошинова, «позволяет говорить о единой фрактальной грамматике искусства и отнести свойство фрактальности к метаязыку различных по природе искусств». Есть все основания сказать, что «книга природы написана на языке фракта-

лов». Более того, имеются попытки доказать, что и книга искусства написана на языке фракталов.

Так как преобразование подобия, в частности самоподобия, является частным случаем симметрии, то, с одной стороны, фрактальность можно считать одним из проявлений симметрии. Такого расширительного толкования симметрии придерживается А. В. Волошинов: «Поскольку симметрия сегодня понимается расширительно как сохранение (инвариантность) некоторой характеристики, то к разновидностям симметрии следует отнести и *пропорцию* как инвариант роста, и *золотое сечение* как геометрическую пропорцию, обладающую аддитивным свойством, и *ритм* как переносную симметрию в пространстве или во времени, и, наконец, *фракталы* как самоподобные структуры, имеющие инвариантную морфологию в различных масштабах» [25].

С другой стороны, практически все выделенные виды симметрии можно считать частными случаями подобия или комбинацией подобий, т. е. симметрию можно рассматривать как проявление фрактальности с конечным числом итераций. Таким образом, понятия симметрии и фрактальности тесно взаимосвязаны. Первая раскрывает в красоте устойчивый порядок, а вторая отражает в ней результат самоорганизации хаоса природы или свободы человеческой мысли. Симметрия и фрактальность представляют собой две стороны красоты, эстетически дополняющие одна другую и взаимно переходящие математически друг в друга. Синергетическая парадигма предоставила возможность посмотреть по-новому на категорию красоты – как интеграцию и взаимодействие симметрии и фрактальности.

Как известно, первые фрактальные множества были выделены в конце XIX – начале XX в., но идея фракталов, в отличие от концепций симметрии, вызывала сначала неприязнь и недоумение у значительной части ученых-математиков. Один из создателей теории множеств Георг Кантор первым построил фрактальное множество из отрезка путем его деления и выбрасывания из этого отрезка бесконечное число раз интервалов разной длины. В результате получился фрактальный объект – «канторова пыль». Позднее были построены другие фрактальные множества – треугольник Серпинского, снежинка Коха и др., которые удивляли своей эстетической привлекательностью.

С течением времени становилось все более очевидно, что неослабевающий интерес к фракталам объясняется не столько своеобразной модой и необычностью, сколько теми возможностями, которые открываются перед различными научными отраслями благодаря фрактальности.

По последним физическим представлениям Вселенная состоит из бесконечного числа вложенных фрактальных уровней материи с подобными друг другу характеристиками. Фрактальность, по мнению ряда философов, есть одно из всеобщих фундаментальных свойств бытия. С появлением фракталов явственной стала ограниченность описания природы с помощью евклидовой геометрии. Окружающий нас мир гораздо разнообразнее, чем классическое описание – в нем оказалось огромное количество объектов, описываемых с помощью фракталов.

Фрактальная геометрия – это не только новое направление в математике, но и средство интеграции в обучении математике и информационным технологиям. Большинство фрактальных объектов невозможно построить без использования компьютерного оборудования.

В последнее время в математике возникли и другие новые важные разделы, отражающие переход математики и всей науки в целом к новой постнеклассической парадигме: теория графов, теория нечетких множеств, теория хаоса и др. Эти направления в математике обладают большим методологическим, развивающим и прикладным потенциалом и требуют постепенного их внедрения как в вузовскую, так и в школьную программу по математике.

В одной из предыдущих работ, опираясь на тринитарную методологию, мы показали, что «фрактальность вполне возможно трактовать как третий элемент, который необходим для разрешения антагонизма между дискретностью и непрерывностью в математике и математическом образовании, как меру их компромисса» [27]. Учитывая это и всё изложенное в данной статье, можно утверждать, что красота в математике определяется взаимодействием и гармоническим балансом двух оппозиций – симметрии и фрактальности.

Таким образом, симметрия и фрактальность – важнейшие понятия, составляющие математическую картину мира, и основные идеи красоты, чем определяется их значение как для математического образования, так и для эстетического воспитания учащихся.

Заключение

Продemonстрированная тесная взаимосвязь понятий симметрии и фракталов указывает на необходимость их тесного увязывания и в обучении. Освоение различных видов симметрии может служить базой для знакомства с фрактальной геометрией на основе введения в курсы математики понятия самоподобия. Такое совместное овладение теорией симметрии и фракталов будет способствовать решению задач, поставленных

в Концепции развития математического образования: повышению мотивации учащихся к изучению математики, развитию познавательного интереса и познавательной активности, сближению образовательного и исследовательского процессов, преодолению проблем эстетической направленности познания. Фрактальность так же, как и симметрия, обладает эстетической привлекательностью: не требуется дополнительных знаний и умений, чтобы ощутить ее природную красоту и испытать от этой красоты эстетическое удовольствие.

Познакомить учащихся с фракталами стоит еще и для того, чтобы помочь им понять красоту хаоса и законы нелинейного мира. А понимание процесса научного познания мира – одно из важнейших качеств культурного человека. Фракталы пока не включены даже в вузовские программы, однако опыт преподавания фрактальной геометрии уже имеется в ряде вузов и средних учебных заведений.

Список использованных источников

1. Hausman D. M. Causal asymmetries. New York: Cambridge University Press, 1998.
2. Horwich P. Asymmetries in time. Cambridge, MA: MIT Press, 1987.
3. Дорфман А. Я. Асимметрия и симметрия в восприятии времени // Мир психологии. 2013. № 4 (76). С. 224–236.
4. Томских А. А. Симметрия и асимметрия высшего образования в условиях глобализации // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Серия: Естественные и медицинские науки. 2012. № 1. С. 124–132.
5. Бурмистрова Н. А., Кальницкая И. В. Симметрия и асимметрия стратегий развития высшего образования в контексте устойчивого развития // Сборник научных трудов VII Международной научно-практической конференции «Симметрия: теоретический и методический аспекты»: в 2 т. Т. 1. Астрахань: Триада, 2018. С. 7–10.
6. Burmistrova N. A., Kormiltseva E. A., Shmakova A. P., Loshchilova M. A. An Innovative Approach to Education in the Context of Sustainable Development // The European Proceedings of Social & Behavioural Science. 2017. № XXVI. P. 122–129.
7. Фирстова Н. И. Эстетическое воспитание при обучении математике в средней школе: учебное пособие. Москва: МПГУ; Прометей, 2013. 128 с.
8. Фирстова Н. И. Роль эстетического воспитания на уроках математики в средней школе // Образовательные ресурсы и технологии. 2016. № 2 (14). С. 88–92.
9. Черник О. В. Типология задач, реализующих эстетический потенциал математики в процессе обучения // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2004. № 6. С. 313–321.

10. Скворцова Н. Н. Урок «Симметрия вокруг нас» по курсу «Наглядная геометрия» (6-й класс) // Концепт: научно-методический электронный журнал. 2017. Т. 15. С. 73–74.
11. Саранцев Г. И. Эстетическая мотивация в обучении математике. Саранск: ПО РАО: Мордовский педагогический институт, 2003. 136 с.
12. Розов Н. Х. Курс математики общеобразовательной школы: сегодня и послезавтра // Задачи в обучении математике: теория, опыт, инновации: материалы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 115-летию чл.-кор. АПН СССР П. А. Ларичева. Вологда: Русь, 2007. С. 6–12.
13. Антипова Е. П., Богановская Н. Д., Бубликов С. В. и др. Современные проблемы физико-математического образования: вопросы теории и практики: всероссийская коллективная монография. Екатеринбург: УрГПУ; АМБ, 2012. 264 с.
14. Смирнов Е. И., Секованов В. С., Миронкин Д. П. Повышение учебной мотивации школьников в процессе освоения понятий самоподобного и фрактального множеств на основе принципа фундирования // Ярославский педагогический вестник. 2015. № 3. С. 37–42.
15. Секованов В. С. Методическая система формирования креативности студента университета в процессе обучения фрактальной геометрии. Кострома: КГУ им. Н. А. Некрасова, 2005. 279 с.
16. Волошинов А. В. Об эстетике фракталов и фрактальности искусства // Синергетическая парадигма. Нелинейное мышление в науке и искусстве. Москва: Прогресс-Традиция, 2002. С. 213–246.
17. Горшков А. А. Эстетическое воспитание учащихся на уроках математики с использованием программы ADOBE FLASH // Ярославский педагогический вестник. 2012. № 2, Т. II. Серия: Психолого-педагогические науки. С. 88–91.
18. Секованов В. С., Дорохова Ж. В., Кудряшова Ю. В., Катержина С. Ф. Использование в обучении фрактальных методов и информационных технологий как средство эстетического воспитания студентов вуза // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2017. Т. 23. № 5. С. 87–93.
19. Секованов В. С., Кудряшова Ю. В., Дорохова Ж. В., Зобов А. Ю., Селезнева Е. М. Эстетика фрактальной геометрии // Обучение фрактальной геометрии и информатике в вузе и школе в свете идей академика А. Н. Колмогорова: материалы Международной научно-методической конференции. Кострома: КГУ, 2016. С. 56–63.
20. Бабкин А. А. Фрактальная геометрия как средство ознакомления с новыми понятиями современной математики // Задачи в обучении математике: теория, опыт, инновации: материалы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 115-летию чл.-кор. АПН СССР П. А. Ларичева. Вологда: Русь, 2007. С. 13–16.
21. Горшков А. А. Изучение элементов фрактальной геометрии в школе как средство эстетического воспитания учащихся // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. Т. 19, № 1. Кострома. 2013. С. 181–185.

22. Тестов В. А. О понятии педагогической парадигмы // Образование и наука. 2012. № 9. С. 5–15.
23. Golubev O. B., Testov V. A. Network Information Technologies as a Basis of New Educational Paradigm // Procedia – Social and Behavioral Sciences. Vol. 214, 5 December 2015. P. 128–134.
24. Тестов В. А. Математическое образование в условиях сетевого пространства // Образование и наука. 2013. № 2. С. 111–121.
25. Волошинов А. В., Шиндель С. В. Гармония – симметрия – красота // Человек. 2017. № 4. С. 81–93.
26. Табоякова Ю. В., Волошинов А. В. Хаос древний и современный // Человек. 2018. № 4. С. 49–65.
27. Тестов В. А. Интеграция дискретности и непрерывности при формировании математической картины мира обучающихся // Интеграция образования. 2018. Т. 22, № 3. С. 480–492. DOI: 10.15507/1991-9468.092.022.201803.480–492

References

1. Hausman D. M. Causal asymmetries. New York: Cambridge University Press; 1998.
2. Horwich P. Asymmetries in time. Cambridge, MA: MIT Press; 1987.
3. Dorfman L. Ya. Asymmetry and symmetry in the perception of time. *Mir psikhologii* = *World of Psychology*. 2013; 4 (76): 224–236. (In Russ.)
4. Tomskikh A. A. The symmetry and asymmetry of higher education in the context of globalization. *Vestnik Baltiyskogo federalnogo universiteta im. I. Kanta. Seriya: Yestestvennye i me-ditsinskie nauki* = *Vestnik of the Baltic Federal University named after I. Kant. Series: Natural and Medical Sciences*. 2012; 1: 124–132. (In Russ.)
5. Burmistrova N. A., Kalnitskaya I. V. Symmetry and asymmetry strategies of development of higher education in the context of sustainable development. In: *Simmetriya: teoreticheskiy i metodicheskiy aspekty. Sbornik nauchnykh trudov VII Mezhdunarodnoy nauch.-prakt. konf. v 2 tt.* = *Symmetry: Theoretical and Methodological Aspects. Collection of Scientific Papers of the 7th International Scientific and Practical Conference*; Astrakhan; 2018. In 2 vol. Astrakhan: Publishing House Triada; 2018; 1: 7–10. (In Russ.)
6. Burmistrova N. A., Kormiltseva E. A., Shmakova A. P., Loshchilova M. A. An innovative approach to education in the context of sustainable development. *European Proceedings of Social & Behavioural Science*. 2017; XXVI: 122–129.
7. Firstova N. I. Esteticheskoe vospitanie pri obuchenii matematike v sredney shkole = Aesthetic education in teaching mathematics in high school. Moscow: Moscow State Pedagogical University; Prometheus; 2013. 128 p. (In Russ.)
8. Firstova N. I. The role of aesthetic education in the lessons of mathematics in high school. *Obrazovatelnye resursy i tekhnologii* = *Educational Resources and Technologies*. 2016; 2 (14): 88–92. (In Russ.)
9. Chernik O. V. Typology of problems realising the aesthetic potential of mathematics in the learning process. *Matematicheskiiy vestnik pedvuzov i universi-*

tetov Volgo-Vyatskogo regiona = *Mathematical Bulletin of Pedagogical Institutes and Universities of the Volga-Vyatka Region*. 2004; 6: 313–321. (In Russ.)

10. Skvortsova N. N. Lesson “Symmetry around us” on the course “Visual geometry” (grade 6). *Kontsept: Nauchno-metodicheskiy elektronnyy zhurnal = Concept: Scientific and Methodological Electronic Journal*. 2017; 15: 73–74. (In Russ.)

11. Sarantsev G. I. *Esteticheskaya motivatsiya v obuchenii matematike = Aesthetic motivation in teaching mathematics*. Saransk: Mordovian Pedagogical Institute; 2003. 136 p. (In Russ.)

12. Rosov N. H. Mathematics course of secondary school: Today and the day after tomorrow. In: *Zadachi v obuchenii matematike: teoriya, opyt, innovatsii. Materialy Vserossiyskoy nauch.-prakt. konf. = Problems in Teaching Mathematics: Theory, Experience, Innovation. Materials of All-Russian Scientific Practical Conference*; Vologda; 2007. Vologda: Rus'; 2007. p. 6–12. (In Russ.)

13. Antipova E. P., Boganovskaya N. D., Bublikov S. V., et al. *Sovremennye problemy fiziko-matematicheskogo obrazovaniya: voprosy teorii i praktiki. Vserossiyskaya kollektivnaya monografiya = Modern problems of physical and mathematical education: Questions of theory and practice. All-Russian Collective Monograph*. Ekaterinburg: Ural State Pedagogical University; Publishing House AMB; 2012. 264 p. (In Russ.)

14. Smirnov E. I., Sekovanov V. S., Mironkin D. P. Increasing the learning motivation of schoolchildren in the process of mastering the concepts of self-similar and fractal sets based on the foundation principle. *Yaroslavskiy pedagogicheskiy vestnik = Yaroslavl Pedagogical Bulletin*. 2015; 3: 37–42. (In Russ.)

15. Sekovanov V. S. *Metodicheskaya sistema formirovaniya kreativnosti studenta universiteta v protsesse obucheniya fraktalnoy geometrii = Methodical system of formation of creativity of students in learning fractal geometry*. Kostroma: Kostroma State University; 2005. 279 p. (In Russ.)

16. Voloshinov A. V. Ob jestetike fraktalov i fraktal'nosti iskusstva = On the aesthetics of fractals and fractals of art. In: *Sinergeticheskaya paradigma. Nelineynoe myshlenie v nauke i iskusstve = Synergetic paradigm. Nonlinear thinking in science and art*. Moscow: Progress-Traditsiya, 2002. P. 213–246. (In Russ.)

17. Gorshkov A. A. Aesthetic education of students at the lessons of mathematics with the use of the program ADOBE FLASH. *Yaroslavskiy pedagogicheskiy vestnik. Series: Psikhologo-pedagogicheskie nauki = Yaroslavl Pedagogical Bulletin. Series: Psychological and Pedagogical Sciences*. 2012; № 2 Vol. 2: 88–91. (In Russ.)

18. Sekovanov V. S., Dorokhova Zh. V., Kudryashova Yu. V. & Katerzhina S. F. Use of fractal methods and information technologies as a means of aesthetic education of students. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pedagogika. Psikhologiya. Sotsiokinetika = Bulletin of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Socio-Kinetics*. 2017; 23 (5): 87–93. (In Russ.)

19. Sekovanov V. S., Kudryashova Yu. V., Dorokhova Zh. V., Zobov A. Yu., Selezneva Ye. M. Aesthetics of fractal geometry. In: *Obuchenie fraktalnoy geometrii i informatike v vuze i shkole v svete idey akademika A. N. Kolmogorova: materialy mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferentsii = Learning Fractal Geometry and Computer Science at University and school in the Light of Ideas of the Academician A. N. Kol-*

mogorov. *Materials of the International Scientific-Methodical Conference*; Kostroma; 2016. Kostroma: Kostroma State University; 2016. P. 56–63. (In Russ.)

20. Babkin A. A. Fractal geometry as a means of familiarisation with new concepts of modern mathematics. In: *Zadachi v obuchenii matematike: teoriya, opyt, innovatsii. Materialy Vserossiyskoy nauch.-prakt. konf. = Problems in Teaching Mathematics: Theory, Experience, Innovation. Materials of All-Russian Scientific-Practical Conference*; Vologda; 2007. Vologda: Rus'; 2007. P. 13–16. (In Russ.)

21. Gorshkov A. A. Study of the elements of fractal geometry in school as means of aesthetic education of students. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Kostroma State University*. 2013; 19 (1): 181–185. (In Russ.)

22. Testov V. A. On the concept of pedagogical paradigm. *Obrazovanie i nauka = The Education and Science Journal*. 2012; 9: 5–15. (In Russ.)

23. Golubev O. B., Testov V. A. Network information technologies as a basis of new educational paradigm. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. 2015 Dec 5; 214: 128–134.

24. Testov V. A. Mathematical education in the conditions of network space. *Obrazovanie i nauka = The Education and Science Journal*. 2013; 2: 111–121. (In Russ.)

25. Voloshinov A. V., Shindel S. V. Harmony – symmetry – beauty. *Chelovek = Human*. 2017; 4: 81–93. (In Russ.)

26. Taboyakova Yu. V., Voloshinov A. V. Chaos ancient and modern. *Chelovek = Human*. 2018; 4: 49–65. (In Russ.)

27. Testov V. A. Integration of discreteness and of continuity in the formation of a mathematical picture of the world of students. *Integratsiya obrazovaniya = Integration of Education*. 2018; 22 (3): 480–492. DOI: 10.15507/1991-9468.092.022.201803.480–492 (In Russ.)

Информация об авторе:

Тестов Владимир Афанасьевич – доктор педагогических наук, профессор кафедры математики Вологодского государственного университета; ORCID ID 0000-0002-3573-574X, Researcher ID A-5900-2016, Scopus ID 57203921177; Вологда, Россия. E-mail: vladafan@inbox.ru

Статья поступила в редакцию 23.10.2018; принята в печать 16.01.2019.
Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Information about the author:

Vladimir A. Testov – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Department of Mathematics, Vologda State University; ORCID ID 0000-0002-3573-574X, Researcher ID A-5900-2016, Scopus ID 57203921177; Vologda, Russia. E-mail: vladafan@inbox.ru

Received 23.10.2018; accepted for publication 16.01.2019.
The author has read and approved the final manuscript.